


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

**УТВЕРЖДЕНО**  
решением Ученого совета ФМИАТ

от « 16 » 06 2020 г., протокол № 5/20  
Председатель \_\_\_\_\_ /Волков М.А./  
*подпись, расшифровка подписи*  
« 16 » 06 2020 г.



### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дисциплина	Комбинаторика
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Информационной безопасности и теории управления
Курс	3

Специальность: 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»  
*код направления (специальности), полное наименование*

Специализация: «Безопасность открытых информационных систем»  
*полное наименование*

Форма обучения: очная  
*очная, заочная, очно-заочная (указать только те, которые реализуются)*

Дата введения в учебный процесс УлГУ: « 01 » 09 2020г.

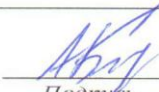
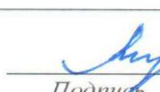
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.


Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_ г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Верёвкин А.Б.	ПМ	доцент, к.ф.-м.н., доцент

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой прикладной математики, реализующей дисциплину	Заведующий выпускающей кафедры информационной безопасности и теории управления
 _____ / Бутов А.А. / <i>Подпись</i> _____ <i>ФИО</i> « <u>03</u> » <u>05</u> 20 <u>20</u> г.	 _____ / Андреев А.С. / <i>Подпись</i> _____ <i>ФИО</i> « <u>10</u> » <u>06</u> 20 <u>20</u> г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цели освоения дисциплины:** освоение основ и методов комбинаторики; овладение углубленными знаниями по комбинаторике; развитие навыков решения комбинаторных задач; формирование уровня математической культуры, достаточного для понимания и усвоения последующих курсов, базирующихся на данной дисциплине; привитие навыков исследовательской работы.

**Задачи освоения дисциплины:** изучение базовых понятий комбинаторики; изучение основных определений и теорем о перечислении и исчислении специальных множеств; формирование фундаментальных знаний об основах современной комбинаторики; приобретение навыков и умений по решению основных комбинаторных задач; изучение приложений комбинаторики в решении прикладных задач.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Комбинаторика» изучается в 6 семестре и относится к обязательным дисциплинам вариативной части блока Б1 предназначенным для студентов, обучающихся по специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем».


Дисциплина основывается на первичных знаниях, полученных при изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Вычислительные методы в алгебре и теории чисел», «Языки программирования».

Результаты освоения дисциплины будут необходимы для дальнейшего процесса обучения в рамках поэтапного формирования компетенций при изучении следующих дисциплин: «Модели безопасности компьютерных систем», «Защита программ и данных», «Криптографические методы защиты информации», а также для прохождения практик и государственной итоговой аттестации.


## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СОТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Процесс изучения дисциплины «Комбинаторика» направлен на формирование следующих компетенций.

Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
ОК-8 – способностью к самоорганизации и самообразованию	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия комбинаторики;</li> <li>- теорию решения линейных рекуррентных соотношений;</li> <li>- основные комбинаторные и арифметические функции;</li> <li>- биномиальные коэффициенты, числа Фибоначчи, Люка, Каталана, Стирлинга, Бернулли;</li> <li>- типы производящих функций;</li> <li>- матрицы инцидентности графов;</li> <li>- теорию разбиений;</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять производящие функции для решения комбинаторных задач;</li> <li>- выявлять рекуррентные зависимости;</li> <li>- перечислять и генерировать необходимые конфигурации;</li> <li>- составлять и пользоваться возможностями графов;</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p>

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками работы с производящими функциями;</li> <li>- навыками перечисления и генерирования конфигураций;</li> <li>- навыками вычисления рекуррентных зависимостей.</li> </ul>
ОПК-5 – способностью применять методы научных исследований в профессиональной деятельности, в том числе в работе над междисциплинарными и инновационными проектами	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия комбинаторики;</li> <li>- теорию решения линейных рекуррентных соотношений;</li> <li>- основные комбинаторные и арифметические функции;</li> <li>- биномиальные коэффициенты, числа Фибоначчи, Люка, Каталана, Стирлинга, Бернулли;</li> <li>- типы производящих функций;</li> <li>- матрицы инцидентности графов;</li> <li>- теорию разбиений;</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять производящие функции для решения комбинаторных задач;</li> <li>- выявлять рекуррентные зависимости;</li> <li>- перечислять и генерировать необходимые конфигурации;</li> <li>- составлять и пользоваться возможностями графов;</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками работы с производящими функциями;</li> <li>- навыками перечисления и генерирования конфигураций;</li> <li>- навыками вычисления рекуррентных зависимостей.</li> </ul>
ПК-1 - способностью осуществлять поиск, изучение, обобщение и систематизацию научно-технической информации, нормативных и методических материалов в сфере профессиональной деятельности, в том числе на иностранном языке	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия комбинаторики;</li> <li>- теорию решения линейных рекуррентных соотношений;</li> <li>- основные комбинаторные и арифметические функции;</li> <li>- биномиальные коэффициенты, числа Фибоначчи, Люка, Каталана, Стирлинга, Бернулли;</li> <li>- типы производящих функций;</li> <li>- матрицы инцидентности графов;</li> <li>- теорию разбиений;</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять производящие функции для решения комбинаторных задач;</li> <li>- выявлять рекуррентные зависимости;</li> <li>- перечислять и генерировать необходимые конфигурации;</li> <li>- составлять и пользоваться возможностями графов;</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками работы с производящими функциями;</li> <li>- навыками перечисления и генерирования конфигураций;</li> <li>- навыками вычисления рекуррентных зависимостей.</li> </ul>
ПК-9 - способностью участвовать в разработке защищенных автоматизированных систем в сфере профессиональной деятельности	<p><b>знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия комбинаторики;</li> <li>- теорию решения линейных рекуррентных соотношений;</li> <li>- основные комбинаторные и арифметические функции;</li> <li>- биномиальные коэффициенты, числа Фибоначчи, Люка, Каталана, Стирлинга, Бернулли;</li> <li>- типы производящих функций;</li> </ul>

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		


	<ul style="list-style-type: none"> <li>- матрицы инцидентности графов;</li> <li>- теорию разбиений;</li> </ul> <p><b>уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять производящие функции для решения комбинаторных задач;</li> <li>- выявлять рекуррентные зависимости;</li> <li>- перечислять и генерировать необходимые конфигурации;</li> <li>- составлять и пользоваться возможностями графов;</li> </ul> <p><b>владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками работы с производящими функциями;</li> <li>- навыками перечисления и генерирования конфигураций;</li> <li>- навыками вычисления рекуррентных зависимостей.</li> </ul>
--	---

#### 4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего) 3.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы:


Вид учебной работы	Количество часов (форма обучения - дневная)			
	Всего по плану	В т.ч. по семестрам		
		6		
Контактная работа обучающихся с преподавателем	54	54		
Аудиторные занятия:				
• Лекции	36	36		
• Практические и семинарские занятия	18	18		
• Лабораторные работы (лабораторный практикум)				
Самостоятельная работа	54	54		
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы		Решение задач, тестирование		
Курсовая работа				
Экзамен				
Всего часов по дисциплине	108	108		
Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет)		зачет		

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

Общая трудоемкость в зач. ед.	3	3		
-------------------------------	---	---	--	--

**3. Содержание дисциплины (модуля.) Распределение часов по темам и видам учебной работы:**  
Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий					Форма текущего контроля знаний
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторные работы, практикумы			
1	2	3	4	5	6	7	
<i>Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы</i>							
1. Целочисленные функции	10	2	3	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
2. Перестановки, выборки и размещения	10	2	4	–	–	4	устный опрос, проверка решения задач
3. Комбинаторные задачи арифметики и анализа	12	3	4	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
4. Производящие функции	12	3	3	–	–	6	устный опрос, проверка решения задач
5. Разложения по степенному основанию	10	2	4	–	–	4	устный опрос, проверка решения задач
6. Рекуррентные соотношения	12	3	4	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
<i>Раздел 2. Специальные числа</i>							
7. Числа Фибоначчи	10	2	3	–	–	5	устный опрос, проверка

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

							решения задач
8. Биномиальные коэффициенты и их обобщения	12	3	4	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
9. Числа Каталана	10	2	3	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
10. Числа Бернулли и Стирлинга	12	3	4	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач
<i>Раздел 3. Комбинаторные теории</i>							
11. Разбиения и симметрические функции	10	2	4	–	–	4	устный опрос, проверка решения задач
12. Теория инвариантов	12	2	4	–	–	6	устный опрос, проверка решения задач
13. Теория графов и гиперграфов	12	3	4	–	–	5	устный опрос, проверка решения задач, контрольная работа
Итого	144	32	48	–	–	28	

## 1. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИЛИНЫ (МОДУЛЯ)


### Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы

#### Тема 1. Целочисленные функции.

Принцип индукции для натуральных чисел. Принципы полноты вещественных чисел. Функции «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса. Комбинаторные применения факториалов. Формула Стирлинга.

#### Тема 2. Перестановки, выборки и размещения.

Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление. Алгоритмы генерирования перестановок. Системы Симса. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

### **Тема 3.** Комбинаторные задачи арифметики и анализа.

Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций. Задачи о размене и взвешивании. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК. Задачи на сочетание периодов. Решение линейного диофантового уравнения. Конечные разности и вычисление конечных сумм. Формула суммирования Эйлера. Формальные функциональные ряды и произведения. Различные типы последовательностей.

### **Тема 4.** Производящие функции.

Общее понятие производящей функции. Производящие функции Дирихле, Гильберта, Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля. Теорема Вандермонда. «Теневое» исчисление. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.

### **Тема 5.** Разложения по степенному основанию.

Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел. Двоичный вес натуральных чисел. Разложение натуральных чисел по степеням двойки с повторениями.  $k$ -ичное разложение натуральных чисел и  $k$ -ичный вес.

### **Тема 6.** Рекуррентные соотношения.

Рекуррентные последовательности и их производящие функции. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.

## **Раздел 2. Специальные числа**

### **Тема 7.** Числа Фибоначчи.

Числа Фибоначчи и их производящая функция. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.

### **Тема 8.** Биномиальные коэффициенты и их обобщения.

Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля. Целозначные полиномы. Мультиномиальные коэффициенты. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна. Гауссовы многочлены. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов. Перечисление подпространств пространства над конечным полем. Два  $q$ -бинома Ньютона. Перестановки мультимножеств.  $q$ -Мультиномиальный коэффициент и перечисление перестановок мультимножества. Перечисление беспорядков. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.

### **Тема 9.** Числа Каталана.

Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.

### **Тема 10.** Числа Бернулли и Стирлинга.

Суммирование последовательных степеней. Числа Бернулли и Эйлера. Числа Стирлинга первого и второго рода. Связь между числами Стирлинга. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.

## **Раздел 3. Комбинаторные теории**

### **Тема 11.** Разбиения и симметрические функции.


Разбиения натуральных чисел, диаграммы и производящие функции. Симметрические функции и многочлены, их производящие функции. Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях. Разбиения на разные части. Пентагональная лемма Эйлера и тождество Якоби. Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике. Перестановки с ограничением на расположение. Ладейные многочлены.

### **Тема 12.** Теория инвариантов.

Действие групп на множествах и пространствах. Орбиты и инварианты. Цикловой индекс. Формула Бернсайда и лемма Пойа. Оператор Рейнольдса. Перечисление алгебраических инвариантов. Формулы Молина, Форманека и их обобщения.

### **Тема 13.** Теория графов и гиперграфов.



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

Матрица инцидентности ориентированного графа. Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах. Нахождение кратчайших путей в графе. Перечисление графов и деревьев. Теорема Кэли о помеченных деревьях. Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций. Понятие гиперграфа. Теорема Холла о системах различных представителей множеств. Теорема Рамсея.

## 2. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

### Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы

**Тема 1.** Целочисленные функции (семинар).

**Тема 2.** Перестановки, выборки и размещения (семинар).

**Тема 3.** Комбинаторные задачи арифметики и анализа (семинар).

**Тема 4.** Производящие функции (семинар).


**Тема 5.** Разложения по степенному основанию (семинар).

**Тема 6.** Рекуррентные соотношения (семинар).

**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и самостоятельного изучения).

1. Принцип индукции для натуральных чисел.
2. Функции «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства.
3. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса.
4. Комбинаторные применения факториалов.
5. Формула Стирлинга.
6. Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление.
7. Алгоритмы генерирования перестановок.
8. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.
9. Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения.
10. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций.
11. Задачи о размене и взвешивании.
12. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК.
13. Задачи на сочетание периодов.
14. Решение линейного диофантового уравнения.
15. Конечные разности и вычисление конечных сумм.
16. Формула суммирования Эйлера.
17. Различные типы последовательностей.
18. Производящие функции Дирихле, Гильберта, Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля. «Теневое» исчисление.
19. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.
20. Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел.
21. Двоичный вес натуральных чисел.
22. Разложение натуральных чисел по степеням



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

- двойки с повторениями.
23.  $k$ -ичное разложение натуральных чисел и  $k$ -ичный вес.
24. Рекуррентные последовательности и их производящие функции.
25. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами.
26. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.

## Раздел 2. Специальные числа

**Тема 7.** Числа Фибоначчи (семинар).

**Тема 8.** Биномиальные коэффициенты и их обобщения (семинар).

**Тема 9.** Числа Каталана (семинар).

**Тема 10.** Числа Бернулли и Стирлинга (семинар).


**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и для самостоятельного изучения).

27. Числа Фибоначчи и их производящая функция.
28. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика.
29. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.
30. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты.
31. Треугольник Паскаля.
32. Целозначные полиномы.
33. Мультиномиальные коэффициенты.
34. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна.
35. Гауссовы многочлены.
36. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов.
37. Перечисление подпространств пространства над конечным полем.
38. Два  $q$ -бинома Ньютона.
39. Перестановки мультимножеств.
40.  $q$ -Мультиномиальный коэффициент и перечисление перестановок мультимножества.
41. Перечисление беспорядков.
42. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.
43. Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана.
44. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.
45. Суммирование последовательных степеней.
46. Числа Бернулли и Эйлера.
47. Числа Стирлинга первого и второго рода.
48. Связь между числами Стирлинга.
49. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.

## Раздел 3. Комбинаторные теории

**Тема 11.** Разбиения и симметрические функции (семинар).

**Тема 12.** Теория инвариантов (семинар).

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

### Тема 13. Теория графов и гиперграфов (семинар).

**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и для самостоятельного изучения).

- |     |  |
|-----|--|
| 50. | Разбиения натуральных чисел, диаграммы и производящие функции.   |
| 51. | Симметрические функции и многочлены, их производящие функции.    |
| 52. | Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях.             |
| 53. | Разбиения на разные части.                                       |
| 54. | Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике.           |
| 55. | Перестановки с ограничением на расположение.                     |
| 56. | Ладейные многочлены.   |
| 57. | Действие групп на множествах и пространствах.                    |
| 58. | Орбиты и инварианты.   |
| 59. | Цикловой индекс.   |
| 60. | Формула Бернсайда и лемма Пойа.                                  |
| 61. | Оператор Рейнольдса.   |
| 62. | Перечисление алгебраических инвариантов.                         |
| 63. | Формулы Молина, Форманека и их обобщения.                        |
| 64. | Матрица инцидентности ориентированного графа.                    |
| 65. | Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах. |
| 66. | Нахождение кратчайших путей в графе.                             |
| 67. | Перечисление графов и деревьев.                                  |
| 68. | Теорема Кэли о помеченных деревьях.                              |
| 69. | Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций.         |
| 70. | Понятие гиперграфа.  |
| 71. | Теорема Холла о системах различных представителей множеств.      |
| 72. | Теорема Рамсея.  |

### 3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ


Данный вид работы не предусмотрен УП.

### 4. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Выполнение курсовых работ и рефератов не предусмотрено учебным планом.

*Примерная тематика контрольных работ по дисциплине «Комбинаторика»:*

1. Нахождение комбинаторных формул методом полной индукции.
2. Производящие функции и их применение.
3. Нахождение рекуррентных соотношений.
4. Асимптотика чисел Фибоначчи.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		


5. Бином Ньютона.
6. Суммирование степеней и полиномов.
7. Применение симметрических функций.
8. Вычисление инвариантов действий групп.
9. Перечисление путей в графах.
10. Перечисление конечных слов с обструкциями.

## 5.

## П

### ЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ

1. Принцип индукции для натуральных чисел.
2. Принципы полноты вещественных чисел.
3. Определение функций «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства.
4. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса.
5. Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление.
6. Алгоритмы генерирования перестановок. Системы Симса.
7. Задачи о размене и взвешивании.
8. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК.
9. Задачи на сочетание периодов.
10. Решение линейного диофантового уравнения.
11. Формальные функциональные ряды и произведения, их свойства.
12. Типы последовательностей. Общее понятие производящей функции.
13. Производящие функции Дирихле, Гильберта, Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля.
14. Теорема Вандермонда. Начала «теневого» исчисления.
15. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.
16. Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел.
17. Двоичный вес натуральных чисел.
18. Разложение натуральных чисел по степеням двойки с повторениями.
19. k-ичное разложение натуральных чисел и k-ичный вес.
20. Числа Фибоначчи и их производящая функция.
21. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика.
22. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.
23. Рекуррентные последовательности и их производящие функции.
24. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами.
25. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.
26. Факториалы - их свойства и комбинаторные применения. Формула Стирлинга.
27. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.
28. Целозначные полиномы.
29. Мультиномиальные коэффициенты и их свойства.
30. Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения.
31. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.
32. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна.
33. Конечные разности и вычисление конечных сумм.
34. Формула суммирования Эйлера.
35. Гауссовы многочлены. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов.
36. Перечисление подпространств пространства над конечным полем.
37. Два q-бинома Ньютона.
38. Перестановки мультимножеств. q-Мультиномиальный коэффициент и

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

перечисление перестановок мультимножества.


39. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций.
40. Перечисление беспорядков.
41. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.
42. Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана.
43. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.
44. Числа Стирлинга первого и второго рода. Связь между числами Стирлинга.
45. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.
46. Суммирование последовательных степеней. Числа Бернулли и Эйлера.
47. Разбиения натуральных чисел, их производящие функции и диаграммы Юнга.
48. Симметрические функции и многочлены, их производящие функции.
49. Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях.
50. Разбиения на разные части.
51. Пентагональная лемма Эйлера и тождество Якоби.
52. Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике.
53. Перестановки с ограничением на расположение. Ладейные многочлены.
54. Действие групп на множествах и пространствах. Орбиты и инварианты.
55. Цикловой индекс. Формула Бернсайда и лемма Пойа.
56. Оператор Рейнольдса. Перечисление алгебраических инвариантов.
57. Формулы Молина, Форманека и их обобщения.
58. Матрица инцидентности ориентированного графа.
59. Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах.
60. Нахождение кратчайших путей в графе.
61. Перечисление графов и деревьев.
62. Теорема Кэли о помеченных деревьях.
63. Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций.
64. Теорема Холла о системах различных представителей множеств.
65. Теорема Рамсея.

## 6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ


*Содержание, требования, условия и порядок организации самостоятельной работы обучающихся с учетом формы обучения определяются в соответствии с «Положением об организации самостоятельной работы обучающихся», утвержденным Ученым советом УлГУ (протокол №8/268 от 26.03.2019г.).*

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)	Объем в часах	Форма контроля (проверка решения задач, реферата и др.)
<i>Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы</i>			
1. Целочисленные функции	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
2. Перестановки,	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	4	устный опрос, проверка

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

выборки и размещения			решения задач
3. Комбинаторные задачи арифметики и анализа	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
4. Производящие функции	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	6	устный опрос, проверка решения задач
5. Разложения по степенному основанию	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	4	устный опрос, проверка решения задач
6. Рекуррентные соотношения	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
<i>Раздел 2. Специальные числа</i>			
7. Числа Фибоначчи	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
8. Биномиальные коэффициенты и их обобщения	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
9. Числа Каталана	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
10. Числа Бернулли и Стирлинга	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач
<i>Раздел 3. Комбинаторные теории</i>			
11. Разбиения и симметрические функции	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	4	устный опрос, проверка решения задач
12. Теория инвариантов	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена	6	устный опрос, проверка решения задач
13. Теория графов и гиперграфов	Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к контрольной работе, подготовка к сдаче экзамена	5	устный опрос, проверка решения задач, контрольная работа

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) Список рекомендуемой литературы

#### основная

1. Верёвкин А.Б. Комбинаторика [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов специальности "Математика", Фундаментальная и прикладная алгебра", "Компьютерная безопасность" / Веревкин Андрей Борисович; УлГУ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 1,18 МБ). - Ульяновск : Качалин Александр Васильевич, 2018. — URL: [http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/1301/Verevkin\\_Combinatorics\\_2018.pdf](http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/1301/Verevkin_Combinatorics_2018.pdf)
2. Власов Николай Анатольевич Некоторые задачи комбинаторики.: учеб. пособие / Н.А. Власов. - Ульяновск: УлГУ, 2002. - 45 с.
3. Вечтомов, Е. М. Математика: логика, множества, комбинаторика: учебное пособие для бакалавриата и специалитета / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 243 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-06612-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/441204>

#### дополнительная

1. Гашков, С. Б. Дискретная математика: учебник и практикум для вузов / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 483 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11613-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/445753>
2. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 279 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-00871-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432016>
3. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Б. Гисин. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 383 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00228-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432144>
4. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. - Ульяновск : УлГУ, 2007. - 63 с. - URL: <ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf>
5. Михеева Елизавета Алексеевна Дискретная математика : учебно-метод. пособие для 1 и 2 курсов фак. математики и информ. технологий / Михеева Елизавета Алексеевна; УлГУ, Фак. математики и информ. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2008. - 39 с.

#### учебно-методическая

1. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Барина. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с. – URL: <ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf>
2. Веревкин А. Б. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Комбинаторика» для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (уровень бакалавриата) / А. Б. Веревкин; УлГУ, Фак. математики, информ. и авиац. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2020. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 354 КБ). - Текст : электронный. <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/6371>

Согласовано:


Г.А. Биб - пр кб УлГУ  
должность сотрудника научной библиотеки

Полина И. Ю  
ФИО

ЮлГУ  
подпись

2.06.2019  
дата



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

## в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

### 1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. IPRbooks [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / группа компаний Ай Пи Эр Медиа. – Электрон. дан. – Саратов, [2020]. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru>.

1.2. ЮРАЙТ [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru>.

1.3. Консультант студента [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Политехресурс. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/pages/catalogue.html>.

1.4. Лань [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО ЭБС Лань. – Электрон. дан. – С.-Петербург, [2020]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com>.

1.5. Znanium.com [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Знаниум. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <http://znanium.com>.

2. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: справочная правовая система / Компания «Консультант Плюс». – Электрон. дан. – Москва : КонсультантПлюс, [2020].

3. База данных периодических изданий [Электронный ресурс] : электронные журналы / ООО ИВИС. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <https://dlib.eastview.com/browse/udb/12>.

4. Национальная электронная библиотека [Электронный ресурс]: электронная библиотека. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <https://нэб.рф>.

5. Электронная библиотека диссертаций РГБ [Электронный ресурс]: электронная библиотека / ФГБУ РГБ. – Электрон. дан. – Москва, [2020]. – Режим доступа: <https://dvs.rsl.ru>.

### 6. Федеральные информационно-образовательные порталы:

6.1. Информационная система [Единое окно доступа к образовательным ресурсам](http://window.edu.ru). Режим доступа: <http://window.edu.ru>.

6.2. Федеральный портал [Российское образование](http://www.edu.ru). Режим доступа: <http://www.edu.ru>.

### 7. Образовательные ресурсы УлГУ:

7.1. Электронная библиотека УлГУ. Режим доступа : <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web>.

7.2. Образовательный портал УлГУ. Режим доступа : <http://edu.ulsu.ru>.

Согласовано:


*зам. рек. УИТИТ*  
Должность сотрудника УИТИТ

*Кирюхина О.В.*  
ФИО

*[Подпись]*  
подпись

*[Дата]*  
дата



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа по дисциплине		

## 11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ:

Аудитории для проведения лекций, семинарских занятий, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для предоставления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе. Перечень оборудования, используемого в учебном процессе, указывается в соответствии со сведениями о материально-техническом обеспечении и оснащённости образовательного процесса, размещёнными на официальном сайте УлГУ в разделе «Сведения об образовательной организации».

## 12. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий, организация работы ППС с обучающимися с ОВЗ и инвалидами предусматривается в электронной информационно-образовательной среде с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Разработчик



подпись

\_\_\_\_\_  
доцент

\_\_\_\_\_  
должность

\_\_\_\_\_  
Верёвкин А.Б.

\_\_\_\_\_  
ФИО